

Exponenciales y ecuaciones exponenciales

exponenciales

una exponencial es cualquier expresión de la forma: a^x

donde a (que se denomina *base*) es un número distinto de cero y x (*exponente*) un número cualquiera; este curso sólo trabajaremos con exponenciales en las cuales la base sea positiva y diferente de uno;

-ejemplos:

$5^x, 3^x, 7^{-x}, 8^{3x}$, etc.

[nota: el exponente puede ser un polinomio en x o una fracción algebraica]

propiedades

son las correspondientes a la potencias que ya vimos en un tema anterior; recordemos las más importantes:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad a^1 = a$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad a^0 = 1$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad a^{-n} = 1/a^n$$

ecuaciones exponenciales

son aquellas que verifican que la incógnita o incógnitas aparecen formando parte de un exponente; resolveremos dos tipos:

a) ecuaciones exponenciales monómicas

son aquellas que se pueden expresar como una igualdad entre dos expresiones monómicas;

- ejemplos:

$$5^{2x+1} = 25$$

$$6^{3x-1} = 216$$

- resolución: se trata de expresar los dos miembros de la igualdad como potencias de la misma base; si ésto no fuera posible hay dos posibilidades: o la ecuación no tiene solución o debe resolverse mediante el uso de logaritmos; veamos algunos ejemplos:

1) $5^{2x+1}=25$

ponemos 25 como potencia de 5, con lo cual: $5^{2x+1}=5^2$

de la igualdad anterior se deduce que los exponentes son iguales; esta

operación es equivalente a "tachar" las bases: $5^{2x+1} = 5^2$

por ello: $2x+1=2$; obtenemos una ecuación de 1º grado cuya resolución es inmediata:

$$2x=2-1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=1/2$$

2) $6^{3x-1}=216$

ponemos 216 como potencia de 6, con lo cual: $6^{3x-1}=6^3$

tal y como hicimos antes, "tachamos" las bases: $6^{3x-1} = 6^3$

y así nos queda la ecuación: $3x-1=3$ cuya resolución es sencilla:

$$3x=3+1 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=4/3$$

b) ecuaciones exponenciales trinómicas

son aquellas que, mediante una operación que denominamos "cambio de variable", se pueden convertir en una ecuación de 2º grado (que sí sabemos resolver)

- ejemplos

$$2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$3^{2x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$$

[observemos que se denominan trinómicas porque aparecen 3 términos sumándose o restándose]

- resolución:

1) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$

lo primero que debemos hacer es "aislar" los términos que llevan x utilizando las propiedades de las potencias:

$$\overbrace{2^{2x+1}}^{2^{2x} \cdot 2^1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

a continuación hacemos lo que se denomina un "cambio de variable":

$$\begin{cases} \text{a } 2^x \text{ le llamamos } y \\ \text{a } 2^{2x} \text{ le llamamos } y^2, \text{ ya que: } 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2 \end{cases}$$

con lo cual la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$y^2 \cdot 2 - 3 \cdot y + 1 = 0, \text{ que es una ecuación de 2º grado de resolución}$$

inmediata:

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1/2 = 2^{-1} \end{cases}$$

calculada y debemos deshacer el cambio de variable para hallar x:

$$\begin{array}{ll} 2^x = y & 2^x = y \\ 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 & 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

2) $3^{2x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$

primer paso: "aislar" las incógnitas aplicando las propiedades de las potencias:

$$\frac{3^{2x-1}}{3^{2x} \cdot 3^{-1}} - \frac{8 \cdot 3^{x-1}}{8 \cdot 3^x \cdot 3^{-1}} - 3 = 0$$

en este caso, al haber exponentes negativos, por las propiedades de las potencias, podemos escribir así la ecuación:

$$\frac{3^{2x}}{3} - \frac{8 \cdot 3^x}{3} - 3 = 0$$

sacando el mcm, ésta queda: $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

ahora hacemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} \text{a } 3^x \text{ le llamamos } y \\ \text{a } 3^{2x} \text{ le llamamos } y^2, \text{ ya que: } 3^{2x} = (3^x)^2 = y^2 \end{cases}$$

con lo cual la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

resolvemos:

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

calculada y debemos deshacer el cambio de variable para hallar x:

$$\begin{array}{ll} 3^x = y & 3^x = y \\ 3^x = -1 \Rightarrow \text{imposible} & 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \end{array}$$

[las soluciones negativas no valen, ya que es imposible que al elevar un número positivo a otro obtengamos un resultado negativo]

3) $5^{x^2-5x+6} = 1$

aquí el problema parece más complicado: ¿cómo expresamos 1 como potencia de base 5? si recordamos las propiedades de las potencias: $a^0=1$, con lo cual, es cierto que $5^0=1$; ésto nos conduce a lo siguiente:

$$5^{x^2-5x+6} = 5^0$$

gracias a lo cual ya podemos resolver la ecuación:

“tachamos” las bases: $5^{x^2-5x+6} = 5^0$, y obtenemos: $x^2 - 5x + 6 = 0$, ecuación de 2º grado que se resuelve utilizando la fórmula que aprendimos en 3º de ESO y cuyo resultado es: $x_1=2$, $x_2=3$